Informationsgehalt eines Röntgenbildes und Dosis

K. Ewen

1. Matrix und Bittiefe

Bildqualität und Dosis (z.B. Bildempfängerdosis) sind miteinander korreliert, die eine wächst mit der anderen. Bei digitalen bildgebenden Systemen unterscheidet man zwischen analoger Bildqualität, im Wesentlichen festgelegt durch den Detektor, und digitaler Bildqualität, im Wesentlichen festgelegt durch Matrixgröße und Bittiefe.
Auf digitaler Seite bestimmt die Matrixgröße die Ortsauflösung, während die Kontrastauflösung von der Bittiefe festlegt wird. Die Matrixgröße ist das Produkt aus Matrixbreite mal –tiefe, ausgedrückt in Zahl der Pixel. Jedem Pixel wird ein Zahlenwert (Signalwert) zugeordnet, der den Grauwert bestimmt. Die Zahl der zu unterscheidenden Grauwerte („Kontrastauflösung") ist 2^t (t = Bittiefe). Die Maximalwerte für die Matrixgröße und Bittiefe werden grundsätzlich vom Rauschen bzw. vom Signal-Rausch-Verhältnis (SRV) beeinflusst. Letztgenanntes ist wiederum ein Funktion der DQE. Wird die Pixelgröße (Pixelabstand, Pixelshift) zu klein gewählt, gehen bei gegebener Dosis entsprechend niedrige Signalwerte im Rauschen unter. Ähnliches geschieht bei zu hohen Werten für die Bittiefe. Daraus resultierende kleine Grauwertdifferenzen sind dann rauschbedingt nicht mehr auflösbar. Pixelshift a (in µm) und die bildqualitätsrelevante maximale Ortsfrequenz N (Nyqistfrequenz) stehen in folgender Beziehung zueinander: N = 1/(2•a) Lp/mm.
Der Informationsgehalt eines Zeichens (z.B. eines bestimmten Grauwertes) wird in Bit ausgedrückt. Können nur 2 Grauwerte unterschieden werden (z.B. schwarz und weiß), ist der Informationsgehalt 1 Bit (t = 1), d. h. es sind 2 Grauwerte ($2^t = 2^1 = 2$) unterscheidbar, denen man im Rahmen der Digitalisierung entweder eine 0 (weiß) oder eine 1 (schwarz) zuordnet. Sollen z.B. 4 Grauwerte (weiß, hellgrau, dunkelgrau, schwarz) unterschieden werden, so benötigt man eine Bittiefe von t = 2 ($2^t = 2^2 = 4$) und die Digitalisierung lautet: weiß 00, hellgrau 01, dunkelgrau 10, schwarz 11. Radiologische bildgebende Systeme arbeiten mit Matrixgrößen im Megapixelbereich und mit Bittiefen von 8 und mehr.

2. Informationsentropie

Informationstragende Strukturen müssen weit von physikalischen Gleichgewichtszuständen angesiedelt sein. Bei der Bildung komplexer Moleküle haben sich die beteiligten Atome unter dem Einfluss einer von außen einwirkenden Energie von diesem statistischen Gleichgewichtszustand entfernt. Beispielsweise tragen komplexe Moleküle, wie die DNS im Zellkern, durch Variation in der Reihenfolge ihrer 4 Basen (in der Abkürzung A, G, C, T), die gesamte genetische Information eines lebenden Systems. Eine im Gleichgewichtszustand sich befindende Gaswolke mit einer über ein bestimmtes Volumen statistisch gleichmäßig verteilten großen Zahl von Atomen dagegen kann nicht als Informationsträger genutzt werden. Ihr mittlerer Informationsgehalt ist Null. Fazit: Um Informationen zu erzeugen bzw. zu speichern, muss Energie aufgewendet werden.
Am o.g. Beispiel der 4 Zeichen N (Beispiel: Grauwerte) war erkannt worden, dass deren jeweiliger Informationsgehalt I (Beispiel: Bittiefe t) nach $N = 2^I$ bzw. I = ld N (ld = Logarithmus zur Basis 2) I = 2 Bit beträgt.
Einschub: Der Zusammenhang zwischen log x (Logarithmus zur Basis 10) und ld x lautet. ld x = (1/log2)•log x. Der Zusammenhang zwischen ln x (Logarithmus zur Basis e) und ld x lautet: ld x = (1/ln 2)•ln x.

Es ist nicht gesagt, dass alle N Zeichen z_1, z_2, z_3, z_4 mit der derselben Wahrscheinlichkeit auftreten. Zum Beispiel könnten in einem Röntgenbild grundsätzlich die Grauwerte schwarz und weiß viel seltener auftreten als hell- und dunkelgrau. Die den 4 genannten Zeichen zuzuordnenden Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, p_4 müssen die Bedingung Σ(i = 1 bis 4)p_i = 1 erfüllen.
Fall 1: Alle 4 Wahrscheinlichkeiten p_i sind identisch (= 1/N = ¼ = 0,25). Bei N = 4 vorliegenden Zeichen beträgt der Informationsgehalt des Zeichen z_i, genannt $I(z_i)$: $I(z_i)$ = ld N (siehe oben) = ld p_i^{-1} = - ld p_i = - ld 0,25 = 2 Bit.
Fall 2: Die 4 Wahrscheinlichkeiten sind nicht identisch: $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}3$. Jetzt interessiert der **mittlere** Informationsgehalt **aller** Zeichen H:

$$H = \Sigma(i=1 \text{ bis } N) p_i \bullet I(z_i) = - \Sigma(i=1 \text{ bis } N) p_i \bullet \text{ld } p_i \quad \text{mit } \Sigma(i= 1 \text{ bis } N) p_i = 1 \qquad \ldots(1)$$
(Shannon-Formel)

Setzt man die für das Beispiel des Falles 2 genannten Werte für p_i in die Shannon-Formel ein, ergibt sich für den mittleren Informationsgehalt aller Zeichen z_i der Wert H = 1,85 Bit, also weniger als bei einer konstanten Eintrittswahrscheinlichkeit der Zeichen. Das gilt ganz allgemein so.

Der mittlere Informationsgehalt H von N vorliegenden Zeichen z_i (i = 1 bis N) wird in Anlehnung an den thermodynamischen Begriff Entropie S mit Informationsentropie bezeichnet.

$$S = -k_B \bullet \Sigma(i=1 \text{ bis } W) p_i \bullet \ln p_i \qquad \ldots(2)$$

mit k_B = Boltzmann-Konstante ($1{,}38 \bullet 10^{-23}$ J/°K),
W = Zustände der Verteilungsmöglichkeiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit p_i (z.B. Verteilung der Gesamtenergie auf die einzelnen Moleküle einer Gaswolke)

Kombiniert man die Gl. (1) und (2), so erhält man z. B. für den einfachsten Fall, d.h. Informationsgehalt = 1 bit, N (= W) = 2, folgenden Zusammenhang zwischen thermodynamischer Entropie S und Informationsentropie H:

$$S = k_B \bullet \ln 2 \bullet H \qquad \ldots(3)$$

Gl. (3) lässt sich auch folgendermaßen deuten: Die zur Entropieänderung ΔS aufzuwendende Wärmemenge (Energie) ΔE, die bei einer Temperatur T ausgetauscht wird, beträgt:

$$\Delta E = \Delta S \bullet T \qquad \ldots(4)$$

Im Sinne der Gl. (4) wird

$$\Delta E = k_B \bullet T \bullet \ln 2 \quad \text{Joule} \qquad \ldots(5)$$

als die Mindestenergie zur Erzeugung oder Speicherung eines Bit gedeutet. Für eine Temperatur von 20^0 C (= 293^0 K) wäre das: $\Delta E = 2{,}8 \bullet 10^{-21}$ Joule.

3. Informationsgehalt und Dosis

Es kann erwartet werden, dass bei Wahrung gewisser gemeinsamer Randbedingungen (z.B. DQE, SRV) der mittlere Informationsgehalt (die Informationsentropie) H von Röntgenbildern proportional zur Dosis (Kerma) sein muss, die zu ihrer Herstellung erforderlich ist.
Die Kerma ist die Summe aller Anfangsenergien (in Joule) der von Röntgenstrahlung in einem Masseelement von 1 kg frei gesetzten Elektronen: 1 Gray (Gy) = 1 J/kg.
Beispiel: Der digitale Bildempfänger des Mammographiegerätes IMAGE MD der Fa. Giotto besitzt einen aktiven Selendetektor von 23,9 cm x 17,4 cm und eine Matrix von 2816 x 2048 Pixel. Daraus ergibt sich eine Pixelgröße mit der Kantenlänge von 85 µm (Pixel Pitch). Bei einer (etwas willkürlich angenommenen) aktiven Selendicke von 1000 µm errechnet sich ein „Pixelvolumen“ von 722500 $(\mu m)^3$. Nimmt man eine Dichte von 5 g/cm^3 = $5 \cdot 10^{-6}$ $\mu g/(\mu m)^3$ an, dann ist die „Pixelmasse“ 3,6 µg. Dann würde die Kerma zur Erzeugung eines Bit in diesem Volumen den Wert von $2{,}8 \cdot 10^{-21}$ J / 3,6 µg = $7{,}8 \cdot 10^{-7}$ µJ/kg = $7{,}8 \cdot 10^{-7}$ µGy annehmen. Für die gesamte Matrix ergibt sich eine Kerma von 4,5 µGy.
Fazit: Bei digitalen bildgebenden Verfahren ist der Informationsgehalt eines Bildes, ausgedrückt durch die Bitzahl, proportional zur Dosis, die zur Erstellung des Bildes aufgewandt werden muss. Das ist eine unumstößliche Gesetzmäßigkeit. Allerdings kann man mit geeigneten QS-Maßnahmen den Grad der Informationszunahme mit der Dosis, den Proportionalitätsfaktor, beeinflussen. Darauf konzentrieren sich auch alle diesbezüglichen Anstrengungen in der digitalen Mammographie bei der Anwendung von PAS 1054.

Duisburg, Januar 2010
K. Ewen.